Μαθημα 6ο 12/11/2018
ΑΕΙΔΕ

$$(1):\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

Αμεση Euler $\quad (2): \begin{cases} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$

→ Θα δουμε τρια πραγματα

1) <u>Συνεπεια (τοπικο σφαλμα)</u>

$$|\delta^n| = |y(t^{n+1}) - y^{n+1}| = \frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|, \ \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

ομοιομ. διαμ : $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $t^n = a + hn$, $n = 0, 1, \ldots, N$

οταν $h \to 0$ τοτε $\delta^n \to 0$

2) Ευστάθεια

$|\varepsilon^n| = |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{=C} \underbrace{|\varepsilon^0|}_{=|y^0 - z^0|}$ η σταθερά C δεν εξαρτάται από το h

3) Ακρίβεια της Euler

■ **Λήμμα**

Έστω $\delta > 0$ και οι $k, d_0, d_1, \dots$ μη αρνητικοί αριθμοί τ/ω

$d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + k \quad , i = 0, 1, 2, \dots$

Τότε νδο $d_n \le d_0 e^{n\delta} + k \cdot \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \quad , n = 0, 1, 2, \dots$

■ **Απόδειξη**

Δουλεύουμε επαγωγικά 1) νδο ισχύει για $n=0$

2) νδο ισχύει για $n+1$

■ **Απόδειξη Θεωρήματος**

Ορίζουμε τη διαφορά $\varepsilon^n = y(t^n) - y^n$

Θέλουμε νδο η διαφορά αναλυτικής από προσεγγιστικής λύσης φράσσεται

ΠΑΤ

$$y^{n+1} = y^n + h \boxed{f(t^n, y^n)} = y^n + h\, y'^n \quad (1)$$

Άρα $y(t^{n+1}) \overset{\text{Euler}}{=\!=} y(t^n) + h\, y'^n(t^n) + \dfrac{h^2}{2} y''(\xi^n) \quad (2)$

$\xi^n \in (t^n, t^{n+1})$

Αφαιρώ κατά μέλη (1) και (2)

$$\underbrace{y(t^{n+1}) - y^{n+1}}_{\varepsilon^{n+1}} = (y(t^n) - y^n) + h\left(f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)$$

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h\,|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)| + \frac{h^2}{2} |y''(\xi^n)| \Rightarrow$$

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + hL|\varepsilon^n| + \underbrace{\frac{h^2}{2} |y''(\xi^n)|}_{|\delta^n|} \Rightarrow$$

$$|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + hL)|\varepsilon^n| + \max_{0 \le i \le N} |\delta^i|$$

Συμφωνα με το λημμα: Εχουμε·

$$|e^n| \le e^{nhL}\underbrace{|e^0|}_{=|y(t^0)-y^0|=0} + \frac{e^{nhL}-1}{hL}\max_i|\delta^i|$$

Αρα $\quad |e^n| \le \dfrac{e^{nhL}-1}{hL}\max_i|\delta^i|$

$$|e^n| \le \frac{e^{nhL}-1}{L}\max_i \frac{h^2}{2}|y''(\xi^i)| \le \frac{e^{nhL}-1}{hL}\cdot\frac{h^2}{2}\max_{t\in[a,b]}|y''(t)|$$

$$\Rightarrow \max|e^n| \le \frac{e^{L(b-a)}-1}{L}\cdot\frac{h}{2}\cdot M \quad , \quad M=\max_t|y''| \Rightarrow$$

$$\|e^n\|_\infty \le \left(\frac{e^{L(b-a)}-1}{2L}\cdot M\right)h$$

Αρα πρεπει να πουμε οτι

1) η ακριβεια της Euler ειναι τουλαχιστον 1

2) η σταθερα C εξαρτατοι απο το προβλημα που εχω να λυσω $(f, L, b-a)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Θεωρουμε το ΠΑΤ: $\quad (*): \begin{cases} y'=2t, & t\in[0,1] \\ y(0)=0 \end{cases}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η αναλυτικη λυση του $(*)$ ειναι $y(t)=t^2$, $t\in[0,1]$ ↳ Παραβολη

το $y'(t)=2t$, $y''(t)=2=$ σταθερα

Το y'' δεν εξαρτατοι απο το ξ^n δηλ. το $|\delta^n| = \frac{h^2}{2}|y''(\xi^n)|$

Αρα $y^{n+1} = y^n + 2ht^n = y^n + 2hnh \Rightarrow y^{n+1} = y^n + 2nh^2$, $n=0,1,\dots,N-1$

$y^{n+1} = y^n + 2nh^2 = y^{n-1} + 2nh^2 + 2(n-1)h^2 = y^{n-2} + 2h^2(n+(n-1)+n-2) \Rightarrow$

$$y^n = y^0 + 2\underbrace{[1+2+\dots+(n-1)+n]}_{\frac{n(n-1)}{2}}h^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y^n = y^0 + n(n-1)h^2}$$

$y^{n+1} = y^0 + 2h^2[1+2+\dots+(n-1)+n]$

$y(0) = 0 = y^0$

$y^n = y^0 + n(n-1)h^2 \quad \forall n, \ 1 \le n \le N$

$y^n = n(n-1)h^2$

Περιμενουμε να εχουμε το μεγιστο σφαλμα στο $n = N$

$$y^N = N(N-1)h^2 = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - 1\right)h^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^N = 1 - h \\ y(t^N) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$|\varepsilon^N| = |y(t^N) - y^N| = h$

Αρα η ακριβεια της Euler για αυτο το πεχ ειναι ταξης ακριβως 1 και δεν γινεται καλυτερη

■ Γενικευση για συστημα ΣΔΕ

Εστω το συστημα

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(t, \bar{y}), & t \in [0, b] \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

με $\bar{f} : [0,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$

■ Συνεπεια της Euler για το συστημα ΣΔΕ

$\bar{y} : [0,b] \to \mathbb{R}^m$

$$\bar{y}^{n+1} = \bar{y}^n + h \underbrace{\bar{y}'^n}_{= \bar{f}(t^n, y^n)} + \underbrace{\frac{h^2}{2} \bar{y}^{n''}(\xi^n)}_{\bar{\delta}^n}$$

για $i = 1, 2, \ldots, m$, δ_i^n = τοπικο σφαλμα

$$y_i^{n+1} = y_i^n + h f_i(t^n, y_i^n) + \frac{h^2}{2} y_i^{n''}(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

$$\bar{y}^{n''}(\bar{\xi}^n) = \begin{pmatrix} y_1''(\xi_1^n) \\ y_2''(\xi_2^n) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_m^n) \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi}^n \in (t^n, t^{n+1})$$

1η περιπτωση: Νορμα απειρου, $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \max_{1 \le i \le m} |y_i^{n''}(\xi_i^n)| \le \frac{h^2}{2} \max_i \left(\max_t (y_i''(t))\right)$$

$\Rightarrow \|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} \max_{t\in[a,b]} (\max_i |y_i''(t)|)$

$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} M \quad , \quad M = \max \|y''(t)\|_\infty$

Μπορουμε να το δειξουμε και για οποιοδηποτε αλλη νορμα $\|\cdot\| \le C \|\cdot\|_\infty$ αρα τελικα $\|\delta^n\| \le \frac{h^2}{2} CM \; , \; M = \max_t \|y''\|_\infty$

■ Παρατηρηση

Μια μεθοδος για την Α.Ε του γνωστου ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \quad , \quad t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Ειναι απολυτα ευσταθης για καποιο $h>0$ αν οταν εφαρμοσουμε το προβλημα δοκιμης (*) $\begin{cases} y' = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

αυτο δινει φραγμενες προσεγγισεις y^n οταν $n\to\infty$ ($|y^{n+1}| \le |y^n|$). Το διαστημα $I = [a,0]$ ονομαζεται διαστημα απολυτης ευσταθειας.

Για την Euler το βημα $0 \le h \le -\frac{2}{\lambda}$

1) μεγαλη τιμη του λ τοτε h πολυ μικρο

2) μικρη τιμη του λ τοτε h μεγαλο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2#

Θεωρουμε το ΠΑΤ (Προβλημα Δοκιμης)

$$\begin{cases} y' = \lambda y(t) \quad , \quad t\in[0,+\infty) \quad \lambda<0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ#

Γνωστη αναλυτικη λυση στο $t\in[0,+\infty)$, $y(t) = e^{\lambda t}$ οποτε το ΠΑΤ για τη μεθοδο Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \lambda h y^n \Rightarrow y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

$$y^{n+1} = \underbrace{(1+\lambda h)}\, y^n = (1+\lambda h)^{n+1}\, y^0$$

$$= (1+\lambda h)(1+\lambda h)\, y^{n-1} = (1+\lambda h)^3\, y^{n-2}$$

Αρα $y^n = (1+\lambda h)^n y^0 = (1+\lambda h)^n$

$t^n = nh \Rightarrow h = \dfrac{t^n}{n}$ τοτε $y^n = \left(1 + \dfrac{\lambda t^n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$

Αρα $|y^n| \to 0$ οταν $|1+\lambda h| < 1$

$|y^n| = 1$ οταν $|1+\lambda h| = 1$

$|y^n| \to \infty$ οταν $|1+\lambda h| > 1$

■ <u>Παρατηρηση</u>

Συνεπως η μεθοδος Euler δινει προσεγγισεις οι οποιες μιμουνται την συμπεριφορα της $y(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda < 0$ μονο οταν $|1+\lambda h| < 1$ δηλ. $-1 < 1+\lambda h < 1 \Leftrightarrow -2 < \lambda h < 0 \Leftrightarrow \lambda h \in (-2, 0)$

Αρα Παιρνω τιμες το πολυ στο διαστημα $(-2,0)$

Δηλαδη θα πρεπει να περιοριστουμε $[-2,0]$ γιατι το $|1+\lambda h| \le 1$